**Дифференциальные и разностные уравнения**

1. **Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Теорема о существовании и единственности решения.**

**Определение дифференциального уравнения первого порядка**

Дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид:

где — неизвестная функция, — ее производная.

Часто дифференциальное уравнение записывают в явной форме:

Задача Коши

**Задача Коши** (начальная задача) для дифференциального уравнения первого порядка заключается в нахождении решения , удовлетворяющего уравнению и начальному условию:

Теорема о существовании и единственности решения

**Теорема Пикара (о существовании и единственности решения)**: Пусть функция и ее частная производная непрерывны в некоторой области , содержащей точку . Тогда существует интервал , в котором определено единственное решение задачи Коши:

Основные типы дифференциальных уравнений первого порядка

**1. Уравнения с разделяющимися переменными**

Уравнения вида:

Решение: 1. Преобразовать к виду 2. Проинтегрировать обе части:

**2. Однородные уравнения**

Уравнения вида:

Решение: 1. Сделать подстановку , где — новая неизвестная функция 2. Получить уравнение для : 3. Решить полученное уравнение с разделяющимися переменными

**3. Линейные уравнения первого порядка**

Уравнения вида:

Решение: 1. Найти интегрирующий множитель 2. Умножить уравнение на : 3. Левая часть становится производной произведения: 4. Проинтегрировать: 5. Выразить

**4. Уравнения в полных дифференциалах**

Уравнения вида:

Уравнение является уравнением в полных дифференциалах, если .

Решение: 1. Найти функцию такую, что 2. Общее решение имеет вид

2. **Линейные однородные и неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.**

**Линейные однородные дифференциальные уравнения (ЛОДУ)**

Линейное однородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

где — постоянные коэффициенты, .

Метод решения ЛОДУ с постоянными коэффициентами:

Составить характеристическое уравнение:

Найти корни характеристического уравнения .

Составить общее решение в зависимости от типа корней:

Простые действительные корни :

Кратные действительные корни кратности :

Простые комплексные корни :

Кратные комплексные корни кратности :

Общее решение ЛОДУ является линейной комбинацией фундаментальной системы решений:

**Линейные неоднородные дифференциальные уравнения (ЛНДУ)**

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

Общее решение ЛНДУ:

Общее решение ЛНДУ представляется в виде суммы общего решения соответствующего ЛОДУ и частного решения ЛНДУ:

где — общее решение соответствующего ЛОДУ, — частное решение ЛНДУ.

**Методы нахождения частного решения ЛНДУ:**

**Метод вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)**:

Найти общее решение соответствующего ЛОДУ:

Заменить постоянные на функции

Составить систему уравнений для нахождения производных

Найти функции интегрированием

Подставить найденные функции в выражение для

**Метод неопределенных коэффициентов** (применим, когда — квазиполином):

Если , где — многочлен степени :

Если не является корнем характеристического уравнения, то

Если является корнем характеристического уравнения кратности , то

Если или :

Если не является корнем характеристического уравнения, то

Если является корнем характеристического уравнения кратности , то

где , , — многочлены с неопределенными коэффициентами той же степени, что и .

**Разностные уравнения**

Разностное уравнение - это уравнение, связывающее значения неизвестной функции для различных значений аргумента n.

Линейное разностное уравнение -го порядка с постоянными коэффициентами имеет вид:

Методы решения разностных уравнений аналогичны методам решения дифференциальных уравнений: 1. Составление характеристического уравнения 2. Нахождение общего решения однородного уравнения 3. Нахождение частного решения неоднородного уравнения 4. Суммирование общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения